Varianta 020

Subiectul I

a) $A_0(0,1)$ şi $A_1(1,1)$ verifică ecuația $y=1$ căci $0\cdot 0+1=1$ şi $0\cdot 1+1=1$;

b) Deoarece $A_2(2,1)$ se află şi el pe dreatpa $y=1$ rezultă că A_0, A_1, A_2 sunt coliniare ;

c) Aria sa este $\dfrac{OA_0\cdot A_0A_1}{2}=\dfrac{1\cdot 1}{2}=\dfrac{1}{2}$;

d) $O(0,0)$ şi $A_n(n,1)\Rightarrow OA_n=\sqrt{n^2+1}$;

e) Evident $A_k(k,1), k=\overline{0,10}$ sunt coliniare pe dreapta $y=1$ şi cum O şi $A_k(k,1), k=\overline{0,10}$ determină o dreaptă rezultă că numărul dreptelor cerute este 12 ;

f) Deoarece A_i, A_j, A_k cu i, j, k distincte două câte două nu pot determina un triunghi (fiind coliniare) rezultă că singurele triunghiuri sunt de forma OA_iA_j cu $i\neq j, i, j=\overline{0,10}$ iar numărul lor este egal cu numărul submulțimilor de 2 elemente ale unei mulțimi de 11 elemente , adică $C_{11}^2=55$;

Subiectul II :

1.

a) $\log_2 8-\log_3 9+\log_5 25=3$;

b) Folosind formula combinărilor complementare obțin că cel mai mare termen 6, adică C_6^5;

c) $5^x=\sqrt{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

d) $f(-1)=(-1)^4+1=2$;

e) $(f\circ f)(x)=x$ deci $(f\circ f)(1)=1$;

2.

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-4x=0\Leftrightarrow x(x^3-4)=0$ cu singurele soluții reale $x=0$ şi $x=\sqrt[3]{4}$ (facem observația că $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ deci se caută numai soluții reale;

b) $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$;

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-1=0$ cu singura soluție reală $x=1$; observând că $f'(x)<0, (\forall)x<1$ şi $f'(x)>0, (\forall)x>1$ obțin $x=1$ punct de minim pentru f ;

d) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^4-4x\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^5}{5}-2x^2\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{5}-2=-\dfrac{9}{5}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(1-\frac{4}{x^3})}{x^4(4-\frac{1}{x^3})}=\dfrac{1}{4}$;

Subiectul III:

a) Notând $a=c=1$ şi $b=0$ obţin că $I_2 \in G$;

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$;

c) Fie $A, B \in G \Rightarrow (\exists) a, c, a', c' \in (0,\infty)$ şi $b, b' \in \mathbf{R}$ cu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in G$ căci $a \cdot a'$ şi $c \cdot c' \in (0,\infty)$ iar $ab' + bc' \in \mathbf{R}$.

d) Fie $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$; deoarece $\frac{1}{a}; \frac{1}{c} \in (0,\infty)$ şi $-\frac{b}{ac} \in \mathbf{R}$ rezultă că $D \in G$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$ şi am $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi evident $AB \neq BA$;

f) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$;

-pentru $n=1$ am $A^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = A$;

-presupun că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ şi am $A^{n+1} = A^n \cdot A =$

$\begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(a^n + a^{n-1}c + \ldots + ac^{n-1} + c^n) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$

g) Verificăm axiomele grupului; din c) rezultă că $A \cdot B \in G, (\forall) A, B \in G$ adică G e parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricilor; deci legea indusă pe G este şi asociativă. În plus $I_2 \in G$ şi $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A, (\forall) A \in G$ adică I_2 este elementul neutru.

Folosind punctul d) dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ atunci $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$ şi am

$A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$,adică orice element din G este simetrizabil. În concluzie $(G, \cdot)$ grup şi cu punctul c) chiar necomutativ.

Subiectul IV:

a) $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2$;

b); $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ cu unica soluție $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3}$;

observând că $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ e subunitar iar $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3} < 0$ adică pe $[0,\infty)$, f' păstrează semn constant; calculând $f'(1) > 0 \Rightarrow$ pe $[0,\infty)$ f este strict crescătoare şi cum $f(0)=0$ obțin $f(x) \geq 0, (\forall) x \geq 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \ln \frac{3}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (3^x - 2^x) = 0$;

f) $\int_0^x a^t dt = \frac{a^t}{\ln a}\Big|_0^x = \frac{a^x - 1}{\ln a}$;

g) Observând că pe $[0,1]$ f e continuă şi pozitivă am că aria cerută este $\int_0^1 f(x)dx =$

$= \int_0^1 (3^x - 2^x)dx = \int_0^1 3^x dx - \int_0^1 2^x dx = \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}$ (Am folosit f))